LA MÉTHODE MATHÉMATIQUE – UNE QUESTION D'ÉQUILIBRE*

Mervyn R. HENWOOD & Ivan RIVAL
Université de Calgary – Canada

Aimablement traduit de l'anglais par D. DUCLOS que nous remercions.

L'histoire de la religion nous montre que la force des hérésies les plus habiles consiste à exagérer une partie de la vérité au dépens du reste. Le gnosticisme, le donatisme, le montanisme, le catharisme, résultent d'une mise en avant de certaines des doctrines des premiers chrétiens par rapport à d'autres. De dangereuses hérésies naîtront non pas d'interprétations fausses, mais d'un manque de nuances ; elles ne naîtront pas de l'absence de vérité, elles naîtront de l'absence de la vérité totale.

C'est ainsi qu'au sein des Mathématiques Modernes surgit de temps à autre une tendance analogue, tendance malsaine qui consiste à identifier la vérité totale à une de ses parties – identifier la mathématique elle-même avec le *raisonnement déductif*. De prime abord, une telle accusation peut sembler invraisemblable, puisque les mathématiciens, dans leur « routine » habituelle utilisent une grande variété de raisonnements déductifs. L'orientation de la recherche, la sélection des problèmes, la soigneuse construction des exemples, la formulation des conjectures, sont des actions qui précèdent la « promulgation » d'un théorème ; ce théorème est lui-même suivi d'une preuve, preuve qui doit résister à tout raisonnement rigoureux. Tout le monde est d'accord pour dire que les mathématiques ne font pas intervenir que la déduction. Cependant cette accusation persiste... Le mode d'écriture des mathématiques, la façon de les enseigner, l'idée perçue par le profane, et quelquefois par le mathématicien lui-même, tout cela laisse penser que la méthode mathématique est essentiellement, pour ne pas dire exclusivement déductive.

Cette importance exagérée que l'on accorde en mathématiques à la déduction peut bien s'appeler le « mythe du déductivisme » ; plus précisément, « l'hérésie du déductivisme » car nous nous intéressons ici à ce déséquilibre avec prédominance de la vérité sur l'absence de vérité. La déduction représente après tout une part importante des mathématiques et son importance dans le développement des mathématiques modernes est fort justement reconnue. L'engagement total des mathématiciens à la rigueur et aux preuves exhaustives – méthodes axiomatiques et raisonnement déductif formel – a rendu possible les progrès considérables des mathématiques au cours des deux derniers siècles. C'est en partant du « 5ème postulat d'Euclide » que Bolyai et Lobatschewsky ont créé la géométrie non-euclidienne ; Weierstrass, en formalisant la notion de « limite » a créé l'analyse moderne ; c'est Cantor qui a introduit la théorie des ensembles et la topologie après un examen approfondi de la notion de bijection. En réalité, ces méthodes de raisonnement sont tellement liées au développement des mathématiques, que la véritable « essence » des mathématiques, leur doctrine fondamentale est ressentie par les mathématiciens et les non-mathématiciens comme l'alliance entre mathématiques et esprit de déduction. La déduction est une condition sine qua non ; sans le raisonnement déductif, le progrès est impossible.

Et cependant, une croyance qui est si indiscutable demande sûrement un examen minutieux : une croyance, ne doit pas seulement « enseigner » la vérité (celle que nous étudions le fait sûrement), elle doit « enseigner » toute la vérité (là elle ne le fait certainement pas). Donc comme nous l'avons vu, il y a plus, en mathématiques, que le raisonnement

* Réimprimé du I.R.E.M. 29, A.P.M.E.P. 29, Université Claude-Bernard, Lyon 1 (1982), 29-31.

déductif et c'est sur ce point précis que notre « croyance » est incomplète. L'hérésie du déductivisme provient du fait que, dans l'écriture, l'enseignement, la pensée mathématique, on n'a pas reconnu totalement la méthode mathématique. L'hérésie déductiviste devient l'orthodoxie déductiviste.

Cette orthodoxie déductiviste impose obligatoirement un style d'écriture mathématique qui reflète l'hérésie dans le déductivisme. C'est en insistant, au XIXème siècle, sur la rigueur et les preuves exhaustives que s'est défini le style moderne d'exposition mathématique, ce style « théorème-preuve », omniprésent dans toute théorie mathématique. Puisque les théorèmes sont la théorie, on commencera par une liste de terminologie, de définitions, d'axiomes et de lemmes. Suivent les théorèmes énoncés en termes prudents, enfin suivent les preuves.

La façon d'enseigner les mathématiques non seulement témoigne de la puissance du dogme déductiviste, mais sert à le perpétuer. Le déductivisme règne à tous les niveaux de l'enseignement universitaire. Dès que les étudiants atteignent leur « majorité », on leur apprend à « faire la génuflexion » au son du chant mystique : « théorème-preuve », « lemme-preuve », « proposition-preuve », « corollaire-preuve ». On présente les mathématiques comme une construction de déductions logiques en progression perpétuelle, un monument de vérité éternelle et immuable dans lequel chaque déduction est une pierre essentielle.

La croyance populaire fait du mathématicien un raisonneur quelque peu intimidant, ésotérique, infiniment patient dans sa recherche acharnée de logique, et prêt à se précipiter sur les moindres traces d'illogisme chez les autres. Parmi les commentateurs mathématiques, rares sont ceux qui peuvent écrire à propos de cette partie des mathématiques ... « que se passe-t-il quand un chien tenant une canne dans sa gueule essaie de passer par une porte étroite ? ... il tournera sa tête à droite, puis à gauche jusqu'à ce que la canne soit dégagée ». Rares sont aussi ceux qui pensent que la découverte en mathématique ressemble souvent à ... « La traversée de la porte apparaît comme une surprise » ... comme « quelque chose qui arrive fortuitement » ...

L'hérésie du déductivisme consiste donc à accorder une trop grande importance à la déduction, et l'hypothèse implicite dans la façon dont sont écrites et enseignées les mathématiques est que la méthode de la découverte mathématique est essentiellement, pour ne pas dire exclusivement déductive. C'est vrai que la déduction est une étape de la découverte mathématique, importante même. La rigueur déductive est une partie des mathématiques modernes et une partie essentielle. Mais la déduction n'est pas tout, ce n'est ni étape essentielle, ni une partie essentielle.

Ces remarques reposent sur les communications non pas avec les ordinateurs mais avec les gens. C'est une évidence mais alors que le langage de la déduction peut être suffisant et satisfaisant dans la communication avec les ordinateurs, il n'en va pas de même avec les autres personnes. Voici par exemple des situations banales. La plupart des mathématiciens reconnaissent volontiers que de tout temps ce qui était une idée « simple et non ambiguë » lorsqu'on « imaginait » la démonstration, devenait un cahot grotesque lorsqu'on voulait le traduire en langage formel. Presque tous les mathématiciens ont vécu l'histoire d'un de leurs collègues déclarant avoir une nouvelle preuve (« moins d'une page… » … « elle tient en deux lignes... ») d'un théorème classique et trouvant cette « nouvelle » preuve plus difficile à. comprendre. Que dire du cauchemar des étudiants : une courte démonstration non illustrée par un exemple.

Les exemples :

Les exemples qui utilisent le langage de tous les jours possèdent la vertu de la suggestion et de la richesse. Mais qu'est-ce qu'un exemple en mathématiques ? On peut confondre un exemple et un théorème. Un théorème dans une étape d'une théorie mathématique peut être un exemple un peu plus loin dans cette théorie. L'ensemble des nombres réels de l'intervalle unité est, pour un étudiant en topologie, un exemple d'espace topologique compact. Pour un débutant en analyse, cependant, c'est un théorème « profond » que celui qui consiste à affirmer que « de tout recouvrement par des ouverts d'un ensemble fermé borné on peut extraire un recouvrement fini par des ouverts ». En général, un court moment de réflexion suffit pour savoir si un exemple est un « vrai » exemple.

Que peut-on faire alors pour améliorer la communication au niveau de l'écriture et de l'enseignement des mathématiques ? Qu'est-il possible de faire pour corriger le déséquilibre du déductivisme ? On trouvera sûrement la solution dans la richesse et la diversité des exemples illustrant les théories mathématiques. Les exemples enrichissent la théorie ; des exemples judicieusement choisis rendent même impossible l'illustration de théorèmes « vides ». On peut même utiliser les exemples comme point de départ ou comme prolongements d'une théorie.

Faux départs :

Dans la pratique courante des mathématiques, beaucoup de faux départs précèdent la bonne idée qui mène à la solution. Dans l'exposé mathématique orthodoxe, on évite les remarques d'ordre heuristique, bien qu'elles puissent être une aide précieuse dans la compréhension. En vérité, la formulation d'un problème se perfectionne à la suite d'une série de faux-départs. Les exemples illustrant des départs dans des fausses directions sont souvent jugés triviaux, non-nécessaires, et même comme le fruit d'un esprit enfantin. Même ceux qui admettent que ces remarques d'ordre heuristique sont pertinentes avant l'achèvement de la preuve luttent pour qu'elles soient jugées hors de propos après l'établissement de la preuve. Il est une façon de tenir compte de ces « faux départs », c'est de présenter une série d'exemples judicieusement choisis.

Les « Ficelles du métier » :

Pour l'étudiant plongé dans l'orthodoxie déductiviste, il est peu probable qu'il retire de son apprentissage une connaissance « équilibrée » des mathématiques. Sa connaissance des « savoir-faire » actuels, des « trucs », des artifices, ... se fait par accident. Comment apprenons-nous les « ficelles du métier » ? Pour beaucoup de théorèmes, la preuve est évidente. II y a les autres pour lesquels existent différentes possibilités. La fertilité d'une approche particulière n'est pas évidente sinon après un certain travail. L'étudiant familier d'un certain nombre de « trucs » verra immédiatement le bon chemin à suivre. Dans notre enseignement, pourquoi ne faisons-nous pas précéder nos démonstrations de quelques « fausses pistes » pour pouvoir faire sentir ensuite le « bon chemin du raisonnement ». Évidemment ce qui est un « faux-départ » pour ce théorème-ci est un excellent départ pour un autre théorème.

Les contre-exemples :

Souvent, on apprend plus d'une chose en étudiant ce qu'elle n'est pas. Les contre-exemples sont de bons compléments à l'enseignement des mathématiques. En fait, il y a un nombre croissant d'adeptes de cette méthode qui consiste à privilégier les contre-exemples. Ces travaux sont généralement considérés par les experts comme un catalogue déjà prêt de « faux départs ». Les textes de ces travaux comprennent en général les théorèmes importants alors que les contre-exemples sont là pour rendre plausibles les théorèmes. Les contre-exemples servent donc à justifier les hypothèses du « gros théorème ». Ces livres ont une valeur pédagogique certaine. Pourquoi ne pas étudier la topologie, par exemple, en étudiant tout ce qui concerne les contre-exemples importants ? Pourquoi y a-t-il des contre-exemples ? des contre-exemples à quoi ?

Sans exemple, l'apprentissage des mathématiques n'est pas pensable. Les étudiants éduqués au sein de l'orthodoxie déductiviste sont capables de connaître leur catéchisme par cœur sans avoir compris la religion. Lorsqu'on demande à un étudiant de démontrer un théorème, ou bien il connaît « la » preuve ou il ne la connaît pas – c'est du moins la façon qu'ils ont de voir les choses. Un novice donnera un exemple lorsqu'on lui demandera une démonstration alors qu'un étudiant plus avancé – un « affranchi de la déduction » – aura appris qu'un exemple ne fera pas l'affaire. Mais ce « virtuose de la déduction » nourri du pur breuvage du déductivisme n'aura pas appris ce que connaît le mathématicien pratiquant à savoir : l'exploitation totale d'un bon exemple peut, souvent d'ailleurs, contenir toutes les difficultés techniques en même temps que toutes les idées « force » de la preuve.